УДК 528.02, 528.088.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ

DESIGN OF THE SPECIFIED ACCURACY POLYGONOMETRIC

Зайцев А.К. / Zaitsev A.K.

Кандидат технических наук, профессор кафедры геодезии и геоинформатики Государственного университета по землеустройству / Candidat of Tech.Sci., professor of chair “Geodesy and geoinformatic” of The State University of Use Land Planning

e-mail: jornal@geo-science.ru

Аннотация. Обычно принято выполнять оценку качества вычерченного на плане объекта проекта полигонометрического хода, анализируя известную формулу $M = \mu\sqrt{P^{-1}}$, в которой одна из СКП (М или μ) известна, а обратный вес оцениваемой функции (P^{-1}) всегда определён его *уже составленной* в масштабе геометрической схемой. В статье рассматривается ситуация, когда заранее, ещё до составления проекта, известны все три элемента указанной формулы. В этом случае необходимо рассчитать геометрические параметры *только намечаемого* к проектированию хода, которые соответствовали бы заданным значениям элементов расчётной формулы. Предложено три варианта решения задачи, обоснованные теоретически и проиллюстрированные конкретными числовыми примерами.

Ключевые слова: Полигонометрический ход, СКП, обратный вес результатов измерений, геометрические параметры, точностные характеристики.

Abstract. It is customary to assessing the quality of the object drawn of the polygonometric project, analyzing the formula $M = \mu\sqrt{P^{-1}}$, which is one of the standard error (M or μ) is known and the inverse function of the estimated weight (P^{-1}) is always defined it already compiled in the scale of the geometric pattern. In this paper we consider the situation when the advance, even before the drafting, known to all three elements of the formula. In this case it is necessary to calculate the geometric parameters of the intended only for the design speed, which would correspond to given values of the elements of the calculation formula. Proposed three options for solving the problem, based theoretically and illustrated by specific numerical examples.

Keywords: Polygonometric, traverse, standard error, reverse weight measurements, geometrical parameters, the precision characteristics.

В современной инженерно-геодезической практике нередки случаи, когда в техническом задании к договору на выполнение работ требование к точности интересующего заказчика параметра формулируется в виде:

$$M = T \cdot m, \tag{1}$$

где T - коэффициент «понижения точности измерений», m – «точность измерений» в представлении заказчика.

В переводе на профессиональный геодезический язык форму (1) следует понимать как

$$M = \mu\sqrt{P^{-1}}, \qquad (2)$$

где M – средняя квадратичная погрешность (СКП) заданной функции, μ – СКП результата измерения (угла, или стороны, или превышения), вес P которого исполнитель принимает равным единицы (СКП единицы веса), P^{-1} – обратный вес оцениваемой функции.

Сравнивая формулу (2) с (1) видим, что

$$P^{-1}=T^2. \qquad (3)$$

Формула (2) решает «прямую задачу оценки точности сети», а вытекающая из неё формула (4)

$$m = \frac{M}{T} = \mu = \frac{M}{\sqrt{P^{-1}}}. \qquad (4)$$

решает «обратную задачу оценки точности сети». По этим двум формулам оценивается качество составленного проекта геодезической сети, т.е. сети, геометрические параметры которой (форма, размер) уже определены - отражены на топографическом плане или представлены масштабной схемой. В этом случае из двух величин в правой части формул (2) и (4) неизвестной является лишь обратный вес P^{-1} искомой функции, зависящий от геометрии сети. Поскольку последняя на плане уже определена, значение обратного веса P^{-1} заданной функции вычисляется исполнителем либо по способам «метода наименьших квадратов», либо по известным из литературы приближённым формулам.

Но в ситуации, представленной формулой (1), все три элементы формул (2) и (4) известны априори, т.е. ещё до разработки плана геометрической схемы сети обратный вес P^{-1} функции заказчиком задан. Следовательно, в этом случае исполнителю необходимо определить геометрические параметры предполагаемой к созданию на объекте работ геодезической сети, удовлетворяющей всем трём заданным значениям элементов формул (2) и (4).

Решению поставленной задачи и посвящена настоящая публикация. Соответствующий анализ выполним на примере вытянутого равностороннего и уравненного по углам полигонометрического хода. СКП взаимного положения конечных точек такого хода (СКП функции) определяется известной формулой:

$$M^2 = m_S^2 n + \frac{m_\beta}{\rho^2} L^2 \frac{(n+3)}{12}, \qquad (5)$$

где m_S – СКП измерения сторон (мм), L – длина хода (мм), n – число сторон хода, $\rho=206265$ (сек).

Выразив длину L хода в километрах и нормировав соответственно $\rho=0,206265$*сек* (размерности m_S и m_β при этом остаются прежними),преобразуем выражение (5) к виду:

$$M^2 = m_S^2\left[n + \frac{m_\beta}{m_S^2\rho^2} L_{км}^2 \frac{(n+3)}{12}\right]. \qquad (6)$$

Из сравнения формул (6) и (2) следует, что СКП единицы веса $\mu = m_S$ (обратный вес измеренных сторон $Q_S=1$), а выражение в скобках есть обратный вес P^{-1} рассматриваемого полигонометрического хода:

$$P^{-1} = \left[n + \frac{m_\beta}{m_S^2\rho^2} L_{км}^2 \frac{(n+3)}{12}\right]. \qquad (7)$$

Отношение квадратов СКП во втором слагаемом формулы (7) есть обратный вес Q_β измеренных углов:

$$\frac{m_\beta^2}{m_S^2} = Q_\beta. \qquad (7^*)$$

С учётом этого и ранее принятого значения $\rho=0,206265$, формула (7) примет вид:

$$P^{-1} = n + 2L_{км}^2 Q_\beta (n+3). \qquad (8)$$

Обозначим

$$2Q_\beta L_{км}^2 = K \qquad (9)$$

и назовём K – «геометрическим коэффициентом хода».

С учётом (9) преобразуем формулу (8) к следующим двум видам:

$$P^{-1} = n + K(n+3) \qquad (10)$$

$$P^{-1} = n(1+K) + 3K \qquad (11)$$

Два слагаемых формулы (10) являют собой вклад в значение обратного веса P^{-1} хода погрешностей линейных (через число сторон n) и угловых (через выражение K(n+3)) измерений. Последний вклад, в свою очередь, зависит от двух параметров - обратного веса углов Q_β и длины хода $L_{км}$.

Из формул (9) и (10) следуют два очевидных вывода (формулы (11*):

1. Обратный вес Q_β измеренных углов полигонометрического хода обратно пропорционален удвоенному квадрату его длины, выраженной в километрах.
2. Обратный вес P^{-1} всего хода не может быть меньше числа сторон в нём.

$$\begin{aligned} &Q_\beta = K / 2L^2_{\text{км}}; \\ &P^{-1} = T^2 = 2n + 3 \quad (\text{при } \mathrm{K} = 1). \end{aligned} \tag{11*}$$

Но каковы должны быть значения параметров Q_β, $L_{км}$ и n хода, при которых будет выполняться условие (4), соответствующее условию заказчика (1)?

Ниже рассмотрим три возможных варианта решения этого вопроса:

Вариант 1.

Принять условие:

$$Q_\beta = k_1 Q_S = k_1,$$

так как $Q_S=1$ (см. формулу (6), где k_1 – назначенный исполнителем коэффициент пропорциональности обратных весов угловых и линейных измерений.

Задаваясь различными значениями длиной хода $L_{км}$ и коэффициентом k_1, по формуле (9) получаем геометрический коэффициент хода K, а затем из формулы (8), для заданного значения $T = \sqrt{P^{-1}}$ (см. формулу (3)), вычисляем допустимую длину хода:

$$L_{км} = \sqrt{\frac{T^2 - n}{2k_1(n+3)}}. \tag{12}$$

Расчёты по формуле (12) для различных значений T,n и k_1 приведёны ниже в табл.1.

Таблица 1.

Допустимая длина хода $L_{км}$ для различных значений k_1=Q_β, n и $T = \sqrt{P^{-1}}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_1=0,5	4.9	4.4	4.0	3.7	3.4	3.2	3.0	2.9	2.7	2.6
k_1=1	3.5	3.1	2.8	2.6	2.4	2.3	2.2	2.0	1.9	1.8
k_1=2	2.5	2.2	2.0	1/8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2
T	10									
k_1=0,5	2.4	2.1	1.9	1.7	1.6	1.4	1.3	1.2		
k_1=1	1.7	1.5	1.3	1.2	1.0	1.0	0.9	0.9		
k_1=2	1.2	1.0	1.0	0.9	0.8	0.7	0.7	0.6		
T	5									
k_1=0,5	1.4	1.2	1.0	0.8	0.7					
k_1=1	1.0	0.8	0.7	0.6	0.5					
k_1=2	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3					
T	3									
k_1=0,5	0.6	0.6	0.4							
k_1=1	0.4	0.4	0.3							
k_1=2	0.3	0.3	0.3							
T	2									

Табл.1 позволяет исполнителю подбирать различные варианты геометрических и точностных параметров предполагаемого к проектированию полигонометрического хода, который при конкретном значении СКП линейных измерений будет удовлетворять условию (1). Имея в ней СКП единицы $\mu = m_S$, СКП угловых измерений вычисляется, согласно принятому выше условию, по формуле

$$m_\beta = \mu\sqrt{k_1}. \tag{13}$$

Если же значение m_β заранее фиксировано, то из приведенной выше формулы определяется коэффициент k_1 и для него по формуле (12) вычисляется допустимая длина хода.

При любом наборе из табл.1 параметров хода при заданном значении T погрешность M в формуле (1) останется постоянной. Исполнитель выбирает наиболее приемлемый для реальных условий вариант и составляет проект хода, соблюдая его расчётные геометрические параметры. При этом следует соблюдать примерно равные длины сторон:

$$S_{км} = \frac{L_{км}}{n} \tag{14}$$

Вариант 2.

Принять условие:

$$\frac{m_\beta}{\rho} = k_2 \frac{m_S}{s},$$

где S – длина сторон хода, k_2 –назначенный исполнителем коэффициент пропорциональности радианной меры СКП измерения углов и относительной СКП линейных измерений.

Из принятого выше условия, в соответствии с формулой (7*), получим:

$$Q_\beta = \left(k_2 \frac{\rho}{s}\right)^2 \tag{15}$$

Подставим это выражение в формулу (9), будем иметь:

$$2\left(k_2 \frac{\rho}{n}\right)^2 = K. \tag{16}$$

С учётом (13*) из формулы (10) получим следующее выражение для коэффициента k_2:

$$k_2 = \frac{n}{\rho}\sqrt{\frac{(T^2 - n)}{2(n+3)}} \tag{17}$$

Таким образом, при принятом в данном варианте условии, из геометрических параметров хода определяется только его числом сторон. А длина сторон и длина всего хода будут определяться разумным (для исполнителя) значением коэффициента k_2 (см. ниже).

Расчёты по формуле (17) для различных значений T и n приведены в табл.2.

Таблица 2.
Коэффициенты пропорциональности k_2 для различных значений T и n

N	1	2	3	4
T=10	17	30		
T=5	8	14		
T=3	4.8	7.8	10	
T=2	1.9	3.5	4.4	5.8

В табл. 2 мы ограничились значением $n=4$. Очевидно, что с ростом числа сторон значения k_2 будут увеличиваться.

По выбранному из табл.2 значению числа сторон n (для конкретных значений T и k_2) исполнитель, в зависимости от конкретных условий, из формулы:

$$L_{км} = S_{км} n \tag{18}$$

вычисляет либо допустимую длину хода ($L_{км}$), задавшись длиной сторон ($S_{км}$), (которую следует примерно выдерживать при проектировании хода на плане объекта), либо напротив – исходя из предполагаемой длины хода, определяет длину его сторон.

В ситуации, когда число n сторон хода фиксировано, исполнитель, по заданному формулой (1) значению Т, по формуле (17) вычисляет коэффициент k_2 для данного хода.

По известной СКП единицы веса, заданной формулой (1), СКП измерения углов вычисляется из принятого по варианту 2 условия:

$$m_\beta = k_2 \frac{m_S}{s} \rho. \tag{19}$$

Приемлемое для исполнителя абсолютное значение m_β и определяет для него степень разумности выбора коэффициента k_2, вычисляемого по формуле (17) по заданному формулой (1) коэффициенту Т и принятому им значению n.

Вариант 3.

Принять условие

$$N = k_3 K(n+3),$$

где k_3 – назначенный исполнителем коэффициент пропорциональности вкладов СКП линейных и угловых измерений в обратный вес P^{-1} хода.

Из формул (6) и (10) видно, что данное условие соответствует известным в теории ошибок принципам «равного влияния» и «ничтожного влияния» двух величин на конечный результат вычислений, в нашем случае - влияние измерения сторон S (левая часть принимаемого условия) и углов β (правая часть условия) на обратный вес P^{-1} полигонометрического хода.

При $k_3=1$ влияние обратных весов угловых и линейных измерений одинаково. Из (10) получим:

$$n = \frac{T^2}{2} \text{ и } \mathrm{K} = \frac{\mathrm{T}^2}{2(n+3)} = \frac{n}{n+3} \qquad (20)$$

При k_3=0,5 влияние обратного веса угловых измерений не существенно. При этом:

$$n = \frac{T^3}{3} \text{ и } \mathrm{K} = \frac{2n}{(n+3)} \qquad (21)$$

При k_3=2 не существенно влияние обратного веса линейных измерений. Здесь имеем:

$$n = \frac{T^2}{1{,}5} \text{ и } \mathrm{K} = \frac{\mathrm{n}}{2(n+3)} \qquad (22)$$

Таким образом, в данном варианте выстраивается следующая методика решения задачи:

1. По заданному заказчиком значению коэффициента T в формуле (1) определяем по формуле (3) допустимый обратный вес P^{-1} проектируемого полигонометрического хода: $P^{-1}=T^2$.
2. По принятому (самим исполнителем) значению коэффициента пропорциональности k_3 из соответствующей формулы (20),(21) или (22) определяем допустимое число сторон n в проектируемом ходе и значение коэффициента К. Если по условиям объекта число сторон в ходе заранее определено, то значение К вычисляем из формулы (10):

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{T}^2 - \mathrm{n}}{n+3} \qquad (23)$$

3. По принятому (самим исполнителем) значению Q_β из формулы (9) определяем для расчётного в п.2 значения K допустимую длину $L_{км}$ проектируемого хода:

$$L_{\text{км}} = \sqrt{\frac{K}{2Q_\beta}} \qquad (24)$$

Если для конкретных условий объекта длина хода $L_{км}$ фиксирована, то из формулы (9) при полученном в п.2 значению К определяем допустимое значение Q_β:

$$Q_\beta = \frac{K}{2L^2_{\text{км}}} \ . \qquad (25)$$

4. Из формулы (14) по ранее полученным допустимым значениям $L_{км}$ и n (см. п. 3 и 2) вычисляем примерное значение длины S сторон хода, которой следует придерживаться при проектировании масштабной геометрической схемы хода.

Таким образом, геометрические параметры предполагаемого полигонометрического хода определены и можно приступать к его проектированию на плане объекта, сообразуясь с его топографией, формой и размером.

Последний вариант решения поставленной задачи является более обоснованным, простым и, что существенно для производства, более мобильным, чем два предыдущих.

Во всех трёх вариантах оценка точностных характеристик хода после расчёта его геометрических параметров выполняется следующим образом:

А. Задаваясь численным значением СКП единицы веса $m=\mu=m_S$ и при принятом ранее коэффициенте Т (см. п.1) по формуле (1) найдём абсолютное значение СКП запроектированного хода М и его относительную погрешность, определяющую нормативную точность. Или напротив: задавшись последней ($\frac{M}{L}=\frac{1}{z}$) для рассчитанной длины $L_{км}$ вычисляем значение M, а затем по формуле (1) при заданном коэффициенте T вычисляем допустимое значение m_S. (это нередко имеет место при проектировании одиночного хода и всегда – при проектировании сети полигонометрических ходов разной длины и с несколькими узловыми точками).

B. Из формулы (7*) при ранее определённых значениях и m_S вычисляем допустимое значение m_β:

$$m_\beta = m_S\sqrt{Q_\beta}. \qquad (26)$$

Приведём пример расчётов геометрических параметров полигонометрического хода по варианту 3 и его точностных характеристик.

1. Пусть в формуле (1) заказчиком задан коэффициент $T=3$. По формуле (3) находим обратный вес хода: $P^{-1}=T^2=9$.
2. Примем $k_3=0,5$ и по формулам (21) находим максимально допустимое число сторон n в ходе и его геометрический коэффициент K:
$$n=\frac{P^{-1}}{3}=\frac{9}{3}=3;\;\; K=\frac{2n}{n+3}=\frac{6}{6}=1.$$
3. Примем $k_1=Q_\beta=0,5$ и из формулы (9) находим по формуле (24) максимально допустимую длину хода:
$$L_{\text{км}}=\sqrt{\frac{K}{2Q_\beta}}=\sqrt{\frac{1}{1}}=1\text{км}.$$
4. Из формулы (14) определяем *примерную* длину сторон: $S=\frac{L}{n}=\frac{1000}{3}=333\text{м}.$

A. Примем $m_S=\mu=5мм$ и определяем абсолютную (по формуле (1)) и относительную СКП хода: $M=T\cdot m_s=3\cdot 5=15\,\text{мм}$ и $M/L=0{,}015/1000=1/67000$.

B. Из формулы (26) определяем *допустимую* СКП измерения углов: $m_\beta=m_S\sqrt{Q_\beta}=5\sqrt{0{,}5}=3{,}5''$.

Мы, не составляя ещё самого проекта полигонометрического хода, отвечающего заданному в формуле (1) коэффициенту $T=3$ и условию $m=m_S$, определили его допустимые геометрические параметры и точностные характеристики. При этом мы приняли за единицу веса результаты измерении сторон S хода (т.е. $P_S=Q_S=1$, $\mu=m_S$) и численные значения трёх следующих характеристик хода: СКП единицы веса $\mu=m_S=5мм$, коэффициента пропорциональности относительных ошибок линейных и угловых измерений $k_3=0,5$ и обратного веса угловых измерений $Q_\beta=0,5$ (значения этих трёх величин могут быть назначены исполнителем и иными, но соответствующие здравому смыслу – логике и реальной ситуации). В итоге проектируемый ход должен иметь следующие геометрические параметры: $L_{км}=1$ *км;* $n=3$; $S=333$ *м* и точностные характеристики: $m_S=5мм$ (принято нами); $m_\beta=3,5''$; $M=Tm=3*5=15$ *мм*.

Допустим, что к указанным выше начальным данным дополнительно поставлено условие относительно числа сторон n, например, $n=4$. Тогда в п.2 коэффициент K вычисляем из формулы (10) и далее, в п.3, из формулы (9) находим допустимую длину хода $L_{км}$ и соответствующее значение длины S его сторон:

$$P^{-1}\approx n(1+K)+3K=9=4+7K;$$
$$K=(9-4)/7=0{,}429$$
$$L_{\text{км}}=\sqrt{\frac{K}{2Q_\beta}}=\sqrt{\frac{0{,}429}{1}}=0{,}655\,\text{км};$$
$$S=\frac{L}{n}=\frac{0{,}655}{4}=164\,\text{м}.$$

То есть, в этой ситуации изменяются геометрические параметры хода $L_{км}$ и S. Точностные характеристики остаются прежними ($m_S=5мм$; $m_\beta=3,5''$; $M=15мм$).

Если дополнительно поставлено условие только относительно длины хода $L_{км}$, например, $L_{км}=0,8$ *км*, то соответственно изменится длина S сторон хода и согласно формул (14),(10),(25) и (26) изменится значение СКП угловых измерений (см. п.4 и п.6):

$$S=\frac{L}{n}=\frac{0{,}8}{3}=267\,\text{м}.$$
$$P^{-1}\approx n(1+K)+3K=9=3+6K;$$
$$K=(9-3)/6=1;$$
$$Q_\beta=\frac{K}{2L_{\text{км}}^2}=\frac{1}{2\cdot 0{,}8^2}=0{,}78;$$
$$m_\beta=m_S\sqrt{Q_\beta}=5\sqrt{0{,}78}=4''.$$

Остальные характеристики останутся прежними ($n=3$; $m_s=5мм$; $M = 15мм$).

Если дополнительно поставлены условия относительно обоих геометрических параметров хода n и $L_{км}$, например, $n=4$ и $L_{км}=0,8$ *км*, то изменятся длина S сторон и СКП измерения углов (но иначе, чем при двух предшествующих дополнительных условиях):

$$S=\frac{L}{n}=\frac{0,8}{4}=200\,м;$$

$$Q_\beta=\frac{K}{2L_{км}^2}=\frac{0,429}{2\cdot 0,8^2}=0,34;$$

$$m_\beta=m_s\sqrt{Q_\beta}=5\sqrt{0,34}=3''.$$

Точностные характеристики M и m_S не изменятся (m_S=5*мм*, *M*=15*мм*).

Из приведенного примера мобильность данного варианта очевидна: задача решается с соблюдением заданного заказчиком условия (1) даже при ограничениях отдельных геометрических параметров хода, обусловленных объектом работ.

В заключении заметим, что в случае, когда точность хода (*M*) задана не формулой (1), а в относительной мере (например, *M/L=1/25000*), переход к параметрам формулы (1) может быть выполнен двумя следующими способами:

1) Определяем абсолютную СКП хода ($M=\frac{L}{25000}=\frac{1000}{25000}=0,04\,м=4\,см$) и далее из формулы (1) при заданном T определяем СКП единицы веса

$$\mu=m_S\ (при\ T=3,\ \mu=m_S=\frac{M}{T}=\frac{4\ см}{3}=1,3\,см);$$

2) по полученному в п. 1) значению M и принятому значению $\mu=m_S$ из формулы (1) определяем T (при $\mu=m_S=5\,мм$, $T=\sqrt{P^{-1}}=\frac{\mu}{m_S}=\frac{40\,мм}{5\,мм}=8$). Дальнейшие расчёты выполняются по указанной выше методике варианта 3.

Таким образом, в статье показан принципиально новый подход к проектированию полигонометрических ходов: геометрические параметры хода, отвечающие и заданной заказчиком точности и условиям района работ и возможностям исполнителя могут быть довольно просто рассчитаны заранее, ещё до нанесения его на план объекта. Это не в коем случае не исключает классическую оценку хода, нанесённого на план по расчётным выше параметрам, поскольку выдержать их абсолютно строго практически невозможно. Но исполнитель может быть уверен, что заданные формулой (1) точностные характеристики запроектированного им хода и полученные при окончательной его обработке не будут существенно отличаться.