УДК 528

СТЕПЕНЬ ТОЧКИ

DEGREE OF POINT

Зайцев А.К. / Zaitsev A.K.

Кандидат технических наук, профессор кафедры геодезии и геоинформатики Государственного университета по землеустройству / Candidat of Tech.Sci., professor of chair "Geodesy and geoinformatic" of The State University of Use Land Planning

e-mail: jornal@geo-science.ru

Аннотация. В статье приводится ряд формул из геометрии и тригонометрии, как давно известных в математике, так и новых, полученные автором (и ранее им опубликованных), но которые, как показывает производственная и педагогическая практика, остаются не востребованными в профессиональной деятельности многих геодезистов. Между тем, эти формулы представляют не только теоретический интерес, но и могут быть полезны при решении практических инженерно-геодезических задач. К ним относится, в том числе, и такое, известное математикам, но режущее слух инженерам понятие, как «степень точки»?! Ознакомить с этими формулами специалистов прикладной геодезии, творчески относящихся к своей профессии, и является целью настоящей публикации.

Ключевые слова: Элементы простых геометрических фигур: треугольника и окружности.

Abstract. In the article a row over of formulas is brought from geometry and trigonometry, both a long ago known in mathematics and new, got an author (and before by him published), but which, as production and pedagogical practice shows, remain not claimed in professional activity of many geodesists. Meantime, these formulas present not only theoretical interest but also can be useful at the decision of practical engineer-geodesic tasks. To them does behave, including, and such, known mathematicians, but cutting an ear to the engineers concept, how is a «degree of point»?! To acquaint with these formulas of specialists of the applied geodesy, creatively related to the profession, and is the purpose of the real publication.

Keywords: Elements of simple geometrical figures: triangle and circumference.

Межевание земель и земельный кадастр – отнюдь не изобретение европейской цивилизации. Этими важнейшими инструментами управления жизнью общества ещё 4 тысячи лет назад уже владели древние египтяне и вавилоняне. Спустя полторы тысячи лет древние греки не только сохранили это искусство, но и развили его в стройную систему научных знаний, назвав эту науку «Геометрия», что в буквальном переводе на русский означает «Землемерия». «Треугольномерия» - буквально так переводится с греческого «Тригонометрия» , близнецовая сестра Геометрии. Евклид, Архимед (Греция, 3 век д.н.э.) Аполлоний, Гиппарх, Птолемей

(Греция, 2 век д.н.э.), Абу-ль-Вафа (Багдад, 10 век н.э.), Насир эд-Дин (Багдад, 13 век н.э.), Региомонтан (Германия, 15 век н.э.), Ретик, Ото (Германия, 16 век н.э.) Декарт, Ферма (Франция,17 век н.э.), Эйлер (Россия, 18 век н.э.) – вот имена великих мужей науки, трудами которых «Геометрия» и «Тригонометрия» стали базой многих отраслей научных и практических знаний. И более всего - для «Прикладной геодезии».

Имея в виду самое краткое и , пожалуй, самое точное определение Прикладной геодезии – «натурная геометрия», целью которой является определение формы и размера реального объекта исследований, подчеркнём очевидный факт, что абсолютное большинство задач прикладной геодезии решается построением на местности (на объекте) простейших геометрических фигур: треугольников, многоугольников, ломаных и кривых, измерением их отдельных элементов и вычислением по ним других не измеряемых параметров этих фигур и координат характерных точек. Хорошо известные геодезистам теоремы синусов и косинусов (см. рис. 1):

$$\sin\alpha / \sin\beta = a / b,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

и их частные случаи для прямоугольного треугольника, (которые и составляют содержание двух главных геодезических вычислительных задач - прямой и обратной), являют собой основу камеральной обработки натурных измерений. Но мы приведём ниже и другие формулы, в том числе, не столь хорошо известные специалистам, но которые полезно геодезистам иметь в багаже своих знаний как дополнительный инструмент для выполнения камеральных работ не только при обработке результатов измерений, но и при составлении проектов производства геодезических работ на самых различных объектах.

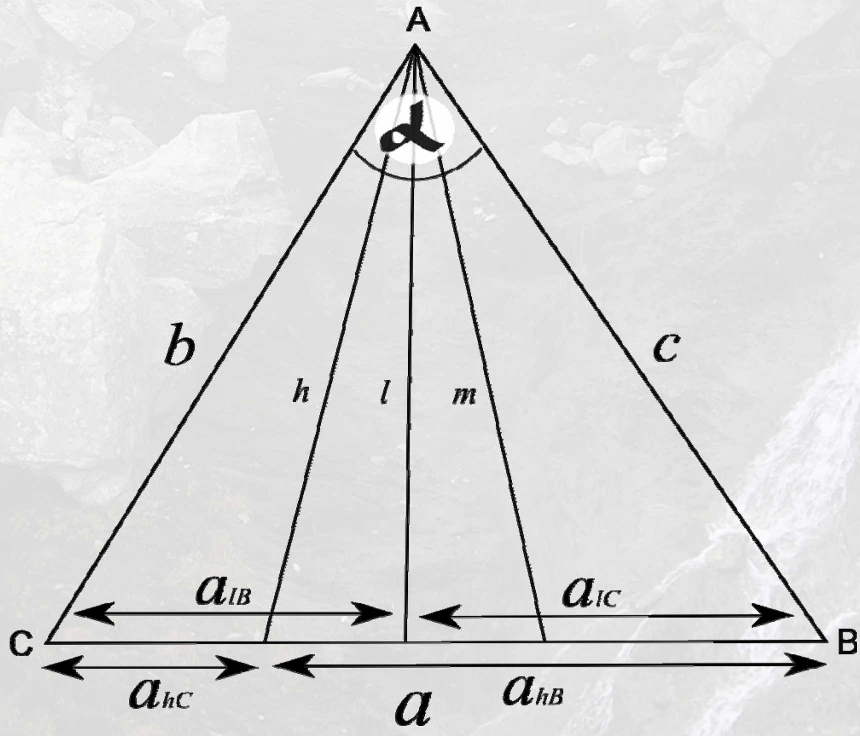

Рис.1

Треугольник

На рис.1 площадь F определяется по формулам:

$$F = ah/2 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= p(p-a)\tan(\alpha/2) = (bc\sin\alpha)/2 = \qquad (1)$$
$$= \left|(\Delta x_{AC}\Delta y_{BC} - \Delta_{BC}\Delta y_{AC}\right|,$$

где p – полупериметр треугольника, равный $(a+b+c)/2$, $\Delta x_{AC}, \Delta y_{BC}$ - приращения координат между соответствующими вершинами треугольника (рис.1).

Вторая и третья формулы в (1) содержат произведение $p(p-a)$, равное

$$p(p-a) = \{(b+c)^2 - a^2\}/4, \qquad (2)^*$$

где разности $(p-a),(p-b),(p-c)$ равны длинам отрезков, отсчитанных от вершин треугольника A, B и C против часовой стрелки (т.е. по сторонам *b, c* и *a* соответственно) до точек касания вписанной окружности*.

Длина отрезка e между точками касания на сторонах b и c (хорда e) равна:

$$e = 2(p-a)\sqrt{1 - p(p-a)/bc}, \qquad (3)$$

Если известны радиусы вписанной (r) и описанной (R) окружностей треугольника, то:

$$F = r \cdot p; \;\; F = abc/4R. \qquad (4)$$

В свою очередь радиусы r и R могут быть вычислены по формулам:

$$r = (p-a)\tan(\alpha/2), \qquad (5)^*$$
$$R = a/2\sin\alpha = bc/2, \qquad (6)^*$$

и находятся между собой в отношении

$$R = abc/4p \cdot r, \qquad (7)^*$$

Высота h:

$$h_a = 2F/a = bc\sin\alpha/a = = bc/2R = 2p \cdot r/a, \qquad (8)$$

Высота h_a делит противолежащую сторону a на отрезки a_{hC} и a_{hB} (см. рис. 1), равные:

$$a_{hB} = (a^2 + b^2 - c^2)/2a = (a-\Delta)/2,$$
$$a_{hC} = (a^2 + c^2 - b^2)/2a = (a+\Delta)/2, \qquad (9)^*$$

Сумма их равна стороне a, а разность Δ:

$$\Delta = a_{hC} - a_{hB} = (c^2 - b^2)/2a, \qquad (10)^*$$

Биссектриса *la:*

$$la = \sqrt{bc\{1 - (a/(b+c))^2\}} =$$
$$= 2/(b+c)\sqrt{bcp(p-a)} =$$
$$= 2bc\cos(\alpha/2)/(b+c) = \sqrt{bc - a_{lB}a_{lC}}.$$

Биссектриса la угла α всегда лежит между высотой h_a и медианой m_a и делит противоположную сторону a на отрезки a_{lC} и a_{lB} (см. рис. 1), равными:

$$a_{lC} = ab/(b+c); \;\; a_{lB} = ac/(b+c), \qquad (11)^*$$

Длина отрезка f биссектрисы от вершины A до центра вписанной окружности равна:

$$f = \sqrt{bc(p-a)/p}, \qquad (12)$$

Медиана m_a:

$$m_a = (\sqrt{2(b^2 + c^2 - a^2})/2$$

Угол α:

Чаще всего угол α вычисляют по приведенным в начале статьи теоремам синусов или косинусов. Последнюю целесообразно представить в виде:

$$\cos\alpha = \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \times \frac{a}{c}\right)/2, \qquad (13)$$

Имеют место так же следующие формулы:

$$\cos\alpha = \{2p \cdot (p-a)/bc\} - 1, \qquad (14)$$
$$\sin\alpha = 2p \cdot r/bc, \qquad (15)^*$$
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{(bc/p(p-a) - 1)} = r/(p-a), \qquad (16)^*$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{p(p-a)/bc}, \qquad (17)$$

Заметим, что во всех приведенных выше 17 формулах аргументами являются стороны *a, b, c* треугольника и только один угол α. В монографии [1] убедительно показано, что возможность решать с надёжным контролем треугольник по приведенным формулам позволяет при

* Здесь и далее формулы, отмеченные «*» получены автором.

обработке сетей трилатерации в каждом треугольнике вычислять только один угол α**,** а не три, как это рекомендуется в ученых пособиях, а в линейно-угловых сетях для контроля полевых измерений достаточно измерить только один угол и при том не во всех, а только в отдельных треугольниках.

Автор предполагает в следующих публикациях привести аналогичную информацию для других простейших геометрических построений – многоугольников, окружностей и линий. В заключении данной статьи укажем на два следующих интересных и полезных для геодезистов момента, относящихся к геометрии окружности.

1. Формула Гюйгенса (17 век н.э.) вычисления длины *k* дуги через стороны равнобедренного треугольника, основанием которого является хорда *L* дуги *k*, а высотой стрелка её прогиба *p*. Обозначим длину бедра этого треугольника через *S* . Тогда:

$$k \approx 2S + (2S - L)/3, \qquad (18)$$

Заметим, что при известных *L* и *p* значение *S* вычисляется как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами *L/2* и *p*.

Относительная погрешность формулы 18) с уменьшением дуги резко падает. Так, при дуге в 60^o она составляет менее 0,5%, а при дуге равной 45^o уже менее 0,02%.

2. Наконец ответим на интригующее название нашей статьи - «Степень точки»?! Сочетание этих слов вызовет у многих читателей естественное недоумение. Степень числа, матрицы, функции – это понятно. Но «степень точки»? Ни в научной, ни в учебной литературе по геодезии, ни, тем более, в нормативных документах такого понятия не встречается. И, тем не менее, понятие «степень точки» в математике существует, и оно может быть полезно для геодезистов.

Степенью T^2 точки *O* в планиметрии называют разность квадратов двух отрезков: квадрата длины отрезка от любой заданной точки *O* до центра любой заданной окружности (G^2) и квадрата радиуса этой окружности (R^2):

$$T^2=G^2-R^2, \qquad (19)$$

С другой стороны, «степень точки T^2» для ***внешней*** точки O (т. е. точка O лежит вне окружности) равна произведению длин секущей, проведенной от точки O до точек M и K пересечения её с окружностью:

$$T^2 = \left(\overline{OM}\right)\times\left(\overline{OK}\right), \qquad (20)$$

И это произведение является постоянным для всех секущих, проведенных из внешней точки *O* к данной окружности.

Формула (20) справедлива и для *внутренней* точки O. В этом случае точки M и K являются конечными точками любой хорды или любого диаметра, проведенных через заданную внутри окружности точку O.

Так как любая секущая вырождается в касательную S, перпендикулярную радиусу к точке касания, то в этом случае в формуле (19) длина G становится гипотенузой, а радиус R –катетом прямоугольного треугольника. Следовательно, корень квадратный из «степени точки T^2» численно равен второму катету -длине касательной S, проведенной от *внешней* точки O до данной окружности: T=S.

Таким образом*, терема Пифагора является частным случаем «степени точки T^2»* Последняя же, в частном случае когда секущая вырождается в касательную, является не чем иным как тангенсом круговой кривой.

Если через *внутреннюю* точку O провести диаметр D , то в формуле (20) точки M и K – концы диаметра: D= $\overline{MK}$. Если далее через точку O провести перпендикулярно диаметру хорду L , то один из отрезков диаметра, например $\overline{OM}$, будет являться стрелкой прогиба *p* дуги *k* , а длина второго отрезка $\overline{OK}$ будет равна (D - *p*).

Тогда по формуле (20) имеем:

$$T^2=p\times(D-p), \qquad (21)$$

откуда получаем:

$$D= (T^2-p^2) / p, \qquad (22)$$

Так как $L \perp D$, то точка О делит хорду пополам и в формуле (20) имеем

$$\overline{OM}^{\wedge} = \overline{OK}^{\wedge} = L/2$$

Здесь точки $M^{\wedge}$ и $K^{\wedge}$ – конечные точки хорды: $L=M^{\wedge}K^{\wedge}$). Следовательно, согласно формуле (20), «степень точки T^2» равна $T^2 = L^2/4$. Подставляя это значение в (22) получим:

$$D = (L^2 - 4p^2) / 4p$$

или

$$R = D/2 = (L^2 - 4p^2)/8p = (L^2/8p) - p/2 \approx L^2/8p \qquad (23)$$

Полученное приближённое (по малости p) выражение для R в учебной литературе известно, но там оно выводится совершенно из других, чисто геометрических построений.

Читатель-геодезист, имеющий дело с объектами, геометрия которых включает элементы круговых кривых, несомненно, оценит полезность приведенных выше формул (18), (19) и (20) и может найти им иное применение, чем рассмотренные нами выше. Например, рассчитать дальность до видимого горизонта с высоты заданной точки наблюдения, или попытаться решить задачу Бируни по определению радиуса Земли (Хорезм, 10 век н.э.), или найти новое нетривиальное решение какой либо из многочисленных задач Прикладной геодезии.

Литература:

1. Зайцев А. К. Трилатерация. М.: Недра, 1989, С.216